

Ratio and Proportion

अनुपात (Ratio) : अनुपात हमेशा दो सजातीय राशि में होता है। एक राशि का दूसरी राशि में भाग देने पर अनुपात प्राप्त होता है। जैसे यदि

A राशि को B राशि से भाग दिया जाये, तब $\frac{A}{B}$ को A तथा B का अनुपात कहते हैं। इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{A}{B} = A : B$$

अतः अनुपात A : B में A को प्रथम पद तथा B को द्वितीय पद कहा जाता है। यदि किसी अनुपात के प्रत्येक पद को 0 को छोड़कर किसी निश्चित संख्या से गुणा या भाग करते हैं तो वह अनुपात अपरिवर्तित रहता है।

अनुपात के गुण (Properties of Ratio)

$a : b = m a : m b$, जहाँ m एक स्थिरांक है।

$a : b : c = A : B : C$ जो समतुल्य है $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ के।

यह एक महत्वपूर्ण गुण है जो तीन राशियों के अनुपात में उपयोग होता है।

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

तो $\frac{(a + b)}{b} = \frac{(c + d)}{d}$

अनुपात का यह गुण कम्पोनेण्डो (Componendo) कहलाता है

उदाहरण के लिए : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

इसलिए, $\frac{(1+2)}{2} = \frac{(2+4)}{4}$

$$= \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{(a-b)}{b} = \frac{(c-d)}{d}$$

यह गुण_डिविडेण्डो_(Dividendo) कहलाता है।

उदाहरण के लिए: $\frac{10}{4} = \frac{20}{8} = \frac{3}{2}$

इसलिए, $\frac{10-4}{4} = \frac{20-8}{8} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$$\frac{(a+b)}{(a-b)} = \frac{(c+d)}{(c-d)}$$

यह गुण_कम्पोनेण्डो और डिविडेण्डो(Componendo and Dividendo) कहलाता है।

उदाहरण के लिए: $\frac{10}{4} = \frac{20}{8}$

इसलिए, $\frac{(10+4)}{(10-4)} = \frac{(20+8)}{(20-8)} = \frac{14}{6} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots$

तो $\frac{(a+c+e+\dots)}{(b+d+f+\dots)}$ = प्रत्येक का अलग-अलग अनुपात

उदाहरण के लिए: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

इसलिए $\frac{(1+2+4)}{(2+4+8)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

यदि $A > B$ तब $\frac{(A+C)}{(B+C)} < \frac{A}{B}$ जहाँ A, B और C प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

उदाहरण के लिए: $3 > 2$,

तब, $\frac{(3+4)}{(2+4)} < \frac{3}{2}$ [क्योंकि $\frac{7}{6} < \frac{3}{2}$]

यदि $A < B$ तो $\frac{(A+C)}{(B+C)} > \frac{A}{B}$

जहाँ A, B और C प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

उदाहरण के लिए: $2 < 3$, तब, $\frac{(2+4)}{(3+4)} > \frac{2}{3}$ [क्योंकि $\frac{6}{7} < \frac{2}{3}$]

एक दी हुई राशि को दिये गये अनुपात में विभाजित करना माना एक दी हुई राशि 'a' को अनुपात $m : n$ में विभाजित करना है।

माना दी हुई राशि का एक भाग x है तो दूसरा भाग $a - x$ होगा।

$$\therefore \frac{x}{a-x} = \frac{m}{n}$$

$$\text{या } nx = ma - mx$$

$$\text{या } (m+n)x = ma$$

$$\therefore \text{पहला भाग है } \frac{ma}{m+n}$$

और दूसरा भाग होगा $a - \frac{ma}{m+n} = \frac{na}{m+n}$

उदाहरण 1. 70 को 3 : 7 अनुपात में विभाजित कीजिए।

हल: माना पहला भाग x है, तो दूसरा भाग $= 70 - x$

$$\therefore \frac{x}{70-x} = \frac{3}{7}$$

$$\text{या } 7x = 210 - 3x$$

$$\text{या } x = 21 \text{ और } 70 - x = 49$$

अतः 70 के दो अभीष्ट भाग 21 और 49 हैं।

किसी द्विआयामी चित्रों में, यदि भुजाओं का अनुपात $x : y$ हो, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात $x^2 : y^2$ होगा।

उदाहरण 2. दो वृत्तों की त्रिज्याओं का अनुपात 2 : 5 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

$$\text{हल: उनके क्षेत्रफलों का अनुपात} = 2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

किसी त्रिआयामी चित्रों में, यदि भुजाओं का अनुपात $x : y$ हो, तो उनके आयतनों का अनुपात $x^3 : y^3$ होगा। यदि दो संख्याओं का अनुपात $a : b$ है और यदि प्रत्येक संख्या में x वृद्धि होने पर अनुपात $c : d$ हो जाए तब, दो संख्याओं का योग

$$= \frac{x(a+b)(c-d)}{ad-bc}$$

दो संख्याओं का अंतर

$$= \frac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$$

दो दी हुई संख्याएँ हैं

$$\frac{xa(c-d)}{ad-bc} \text{ और } \frac{xb(c-d)}{ad-bc}$$

उदाहरण 3. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि प्रत्येक संख्या में 2 की वृद्धि हो, तो अनुपात 7 : 9 हो जाता है। संख्याएँ ज्ञात करें।

हल: संख्याएँ हैं

$$\frac{2 \times 3 (7-9)}{3 \times 9 - 4 \times 7} \text{ और } \frac{2 \times 4 (7-9)}{3 \times 9 - 4 \times 7}$$

या 12 और 16

यदि दो संख्याओं का योग A और अंतर a हो, तो दी हुई संख्याओं का अनुपात $A + a : A - a$ होगा।

उदाहरण 4. दो संख्याओं का योग 60 और अंतर 6 है। संख्याओं का अनुपात क्या होगा?

हल: संख्याओं का अभीष्ट अनुपात

$$= \frac{60+6}{60-6} = \frac{66}{54} = \frac{11}{9}$$

या 11 : 9

समानुपात (Proportion)

जब दो अनुपात बराबर होते हैं तो वे समानुपात कहलाते हैं।

जैसे- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow A : B :: C : D$ यहाँ $AD = BC$

उदाहरण 5. यदि $12 : 18 :: x : 24$ हो, तो x का मान कितना होगा?

हल: $12 : 18 :: x : 24$

$$\Rightarrow 12 \times 24 = 18 \times x$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \times 24}{18} = 16$$

समानुपात के प्रकार

निरंतर समानुपात: यदि तीन संख्याएँ a , b और c निरंतर समानुपात में हो, तो हम कह सकते हैं कि a , b और c समानुपात में हैं।

$$\text{तो, } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

अतः हम कह सकते हैं कि 'a' पहला समानुपात, 'c' तीसरा समानुपात और 'b' मध्य समानुपात है।

प्रत्यक्ष समानुपात: यदि X , Y के प्रत्यक्ष समानुपाती हो तो किसी एक के बढ़ने या घटने पर दूसरे पर उसका सीधा प्रभाव पड़ेगा। यदि X बढ़ता है तो Y भी बढ़ेगा और यदि X घटता है तो Y भी घटेगा।

व्युत्क्रम समानुपात: यदि X , Y के व्युत्क्रमानुपाती हो यानी दोनों में किसी एक के बढ़ने या घटने पर दूसरे पर उसका व्युत्क्रम प्रभाव पड़ेगा। यदि X के बढ़ने पर Y घटे और X के घटने पर Y बढ़े तो इस समानुपात को व्युत्क्रम समानुपात कहते हैं।

- यदि चार राशियाँ समानुपात में हो तो किनारे की राशियों का गुणनफल, बीच की राशियों के गुणनफल के बराबर होता है।

माना a , b , c , d चार राशियाँ समानुपात में हैं, तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\text{तब } ad = bc$$

- यदि तीन राशियाँ a , b और c निरंतर समानुपात में हो, तो $a : b = b : c$

$$\text{तब } ac = b^2$$

b मध्य समानुपात कहलाता है।

यदि तीन राशियाँ समानुपात में हो तो पहली और तीसरी राशि का अनुपात, पहली और दूसरी राशि के अनुपात के समान होता है।

$$\text{यदि } a : b :: b : c \text{ तो } a : c = a^2 : b^2$$

मध्य समानुपात ज्ञात करना

उदाहरण 6. 3 और 75 के बीच मध्य समानुपात ज्ञात करें।

हल: माना x अभीष्ट समानुपात है, तो $3 : x :: x : 75$

$$\therefore x = \sqrt{3 \times 75} = 15$$

जब चार राशियाँ समानुपात में हो, तो अज्ञात मान ज्ञात करना:

उदाहरण 7. चार संख्याएँ 10, 18, 22, 38 में प्रत्येक में कौन-सी संख्या जोड़ी जाए कि वे समानुपात में हो जाएँ?

हल: माना कि अभीष्ट संख्या x है प्रश्न के अनुसार, हम पाते हैं

$$(10 + x) : (18 + x) :: (22 + x) : (38 + x)$$

$$\Rightarrow (10 + x)(38 + x) = (18 + x)(22 + x)$$

$$\Rightarrow 380 + 48x + x^2 = 396 + 40x + x^2$$

$$\Rightarrow 380 + 48x = 396 + 40x$$

$$\Rightarrow 48x - 40x = 396 - 380$$

$$\Rightarrow 8x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{8} = 2$$

अतः चारों दी हुई संख्याओं में, 2 जोड़ी जानी चाहिए।

Click Here - www.edurelation.com

चौथा समानुपात ज्ञात करना

उदाहरण 8. $p^2 - pq + q^2$, $p^3 + q^3$, $p - q$ का चौथा समानुपात ज्ञात करें।

हल: माना x चौथा समानुपात है

$$\therefore (p^2 - pq + q^2) : (p^3 + q^3) = (p - q) : x$$

$$\Rightarrow (p^2 - pq + q^2) \times x = (p^3 + q^3) (p - q)$$

$$\therefore x = \frac{(p^3 + q^3) (p - q)}{(p^2 - pq - q^2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(p + q) (p^2 - pq + q^2) (p - q)}{(p^2 - pq - q^2)}$$

$$\Rightarrow x = (p + q) (p - q) = p^2 - q^2$$

\therefore अभीष्ट चौथा समानुपात $p^2 - q^2$ है।

तीसरा समानुपात ज्ञात करना

उदाहरण 9. $a^2 - b^2$ और $a + b$ के बीच तीसरा समानुपात ज्ञात करें।

हल: माना x अभीष्ट तीसरा समानुपात है,

$$\text{तब, } a^2 - b^2 : a + b = a + b : X$$

$$\therefore (a^2 - b^2) x = (a + b) (a + b)$$

$$\therefore x = \frac{(a + b) (a + b)}{a^2 - b^2} = \frac{a + b}{a - b}$$

Visit Our Website.

Click Here - www.edurelation.com